第 3 节 抛物线小题的综合运算（★★★）

强化训练

1.（2023 •河南新乡二模 •★★）已知抛物线$C: y^2 = 4x$的焦点为 F，点 P 在抛物线 C 上，$Q(5,0)$，若ΔPQF的面积为$4\sqrt{3}$，则$|PF| =$（　　）

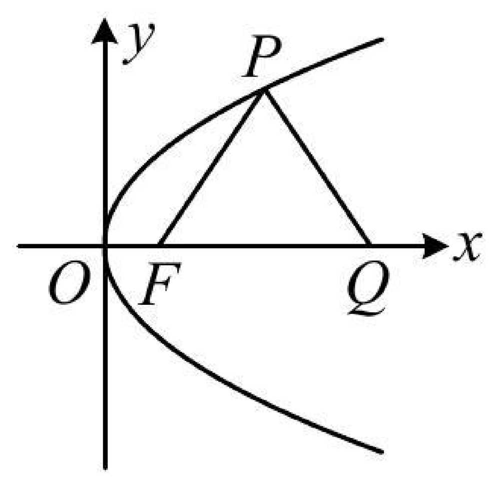
（A）4　　（B）3　　（C）5　　（D）2

答案：A

解析：要求$|PF|$，需要点 P 的坐标，故设坐标，并用坐标计算ΔPQF的面积，从而建立方程并求解，

如图，$F(1,0)$，$|FQ| = 5-1 = 4$，设$P(x_0, y_0)$，则$S_{\Delta PQF} = \dfrac{1}{2}|FQ|\cdot|y_0| = 2|y_0| = 4\sqrt{3}$，所以$|y_0| = 2\sqrt{3}$，

又点 P 在抛物线 C 上，所以$y_0^2 = 4x_0$，故$12 = 4x_0$，解得：$x_0 = 3$，所以$|PF| = x_0 + 1 = 4$.



2.（★★）已知 O 为坐标原点，垂直于抛物线$C: y^2 = 2px(p>0)$的对称轴的直线 l 交 C 于 A，B 两点，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$，且$|AB| = 4$，则$p =$（　　）

（A）4　　（B）3　　（C）2　　（D）1

答案：D

解法 1：可设直线 l 的方程，与抛物线联立求解 A，B 的坐标，再翻译已知条件建立方程，

由题意，可设直线 l 的方程为$x = t(t>0)$，代入$y^2 = 2px$可得：$y^2 = 2pt$，解得：$y = \pm\sqrt{2pt}$，

不妨设$A(t, \sqrt{2pt})$，$B(t, -\sqrt{2pt})$，则$\begin{cases} |AB| = 2\sqrt{2pt} = 4 & ① \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = t^2 + \sqrt{2pt}\cdot(-\sqrt{2pt}) = t^2 - 2pt = 0 & ② \end{cases}$，

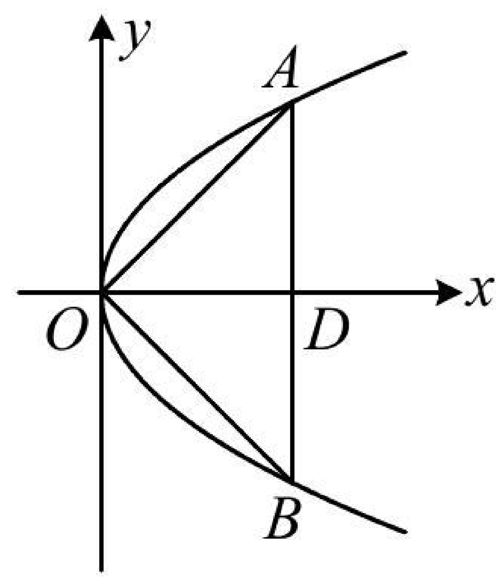
由②结合$t>0$可得：$t = 2p$，代入①解得：$p = 1$.

解法 2：如图，也可通过分析图形的几何特征，找到 A 的坐标，代入抛物线方程求 p，

设直线 l 与 x 轴交于点 D，由对称性，$|OA| = |OB|$，又$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$，所以$OA \perp OB$，

故ΔAOB为等腰直角三角形，所以ΔAOD也是等腰直角三角形，

因为$|AB| = 4$，所以$|OD| = |AD| = 2$，故$A(2,2)$，代入$y^2 = 2px$可得：$2^2 = 2p\cdot 2$，解得：$p = 1$.



3.（2023·江西赣州二模·★★）已知抛物线$E:y^2=2px(p>0)$与圆$x^2+y^2=5$交于 A，B 两点，且 E 的焦点 F 在直线 AB 上，则 $p=$（　　）

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　（C）2　（D）$\sqrt{5}$

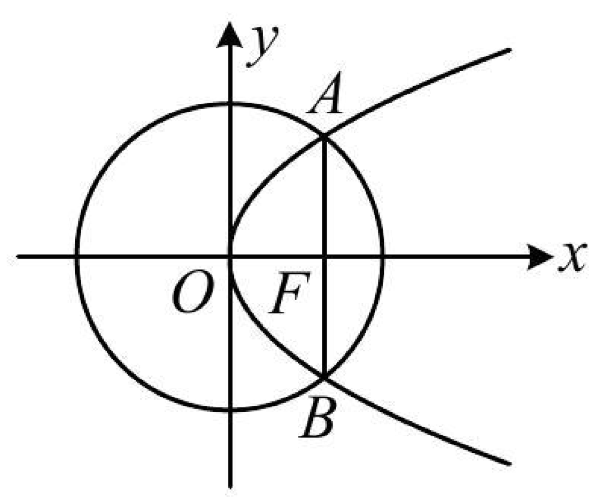
答案：C

解析：如图，由对称性，$AB\perp x$ 轴，又 AB 过焦点$F(\frac{p}{2},0)$，所以直线 AB 的方程为$x=\frac{p}{2}$ ①，

故可将该直线代入抛物线的方程，求出点 A 的坐标，代入圆的方程解 p，

将①代入$y^2=2px$可得$y^2=2p\cdot\frac{p}{2}=p^2$，所以$y=\pm p$，故$A(\frac{p}{2},p)$，

代入$x^2+y^2=5$可得$\frac{p^2}{4}+p^2=5$，解得：$p=2$.



4.（2022·江西上饶模拟·★★）已知抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为$F(1,0)$，则抛物线上的动点 N 到点$M(3p,0)$的距离的最小值为（　　）

（A）4　（B）6　（C）$2\sqrt{5}$　（D）$4\sqrt{5}$

答案：C

解析：抛物线的焦点为$F(1,0)\Rightarrow\frac{p}{2}=1\Rightarrow p=2$，所以抛物线的方程为$y^2=4x$，且 M 的坐标为$(6,0)$，

点 N 在抛物线上运动，可将其坐标设为单变量的形式，用于计算$|MN|$，

可设$N(\frac{a^2}{4},a)$，则$|MN|=\sqrt{(\frac{a^2}{4}-6)^2+(a-0)^2}=\sqrt{\frac{a^4}{16}-2a^2+36}=\sqrt{\frac{a^4-32a^2+576}{16}}=\frac{\sqrt{(a^2-16)^2+320}}{4}$，

所以当$a=\pm4$时，$|MN|$取得最小值$2\sqrt{5}$.

5.（2022·贵州镇远模拟·★★★）已知 A，B 是抛物线$C:y^2=4x$上关于 x 轴对称的两点，D 是 C 的准线与 x 轴的交点，若直线 BD 与 C 的另一个交点是$E(4,4)$，则直线 AE 的方程为（　　）

（A）$2x-y-4=0$　（B）$4x-3y-4=0$　（C）$x-2y+4=0$　（D）$4x-5y+4=0$

答案：B

解析：如图，抛物线的准线为 $x=-1$，所以 $D(-1,0)$，

还知道点 E，于是可写出直线 DE 的方程，与抛物线联立求 B 的坐标，

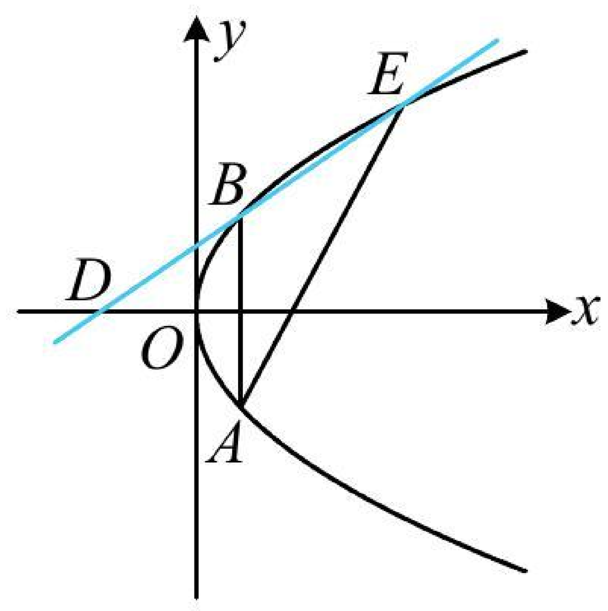
又 $E(4,4)$，所以 $k_{DE}=\dfrac{0-4}{-1-4}=\dfrac{4}{5}$，故直线 DE 的方程为 $y=\dfrac{4}{5}(x+1)$，即 $4x=5y-4$，

代入 $y^2=4x$ 消去 x 整理得：$y^2-5y+4=0$，解得：$y=1$ 或 4，

因为 $y_E=4$，所以 $y_B=1$，又点 B 在抛物线 C 上，所以 $x_B=\dfrac{y_B^2}{4}=\dfrac{1}{4}$，故 $B(\dfrac{1}{4},1)$，

此时可由对称性求得 A 的坐标，结合点 E 写出直线 AE 的方程，由对称性知点 A 的坐标为 $(\dfrac{1}{4},-1)$，

所以 $k_{AE}=\dfrac{-1-4}{\dfrac{1}{4}-4}=\dfrac{4}{3}$，故直线 AE 的方程为 $y-4=\dfrac{4}{3}(x-4)$，整理得：$4x-3y-4=0$.



6.（2013·新课标Ⅱ卷·★★★）设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上，$|MF|=5$，若以 MF 为直径的圆过点 $(0,2)$，则 C 的方程为（　）

（A）$y^2=4x$ 或 $y^2=8x$　（B）$y^2=2x$ 或 $y^2=8x$　（C）$y^2=4x$ 或 $y^2=16x$　（D）$y^2=2x$ 或 $y^2=16x$

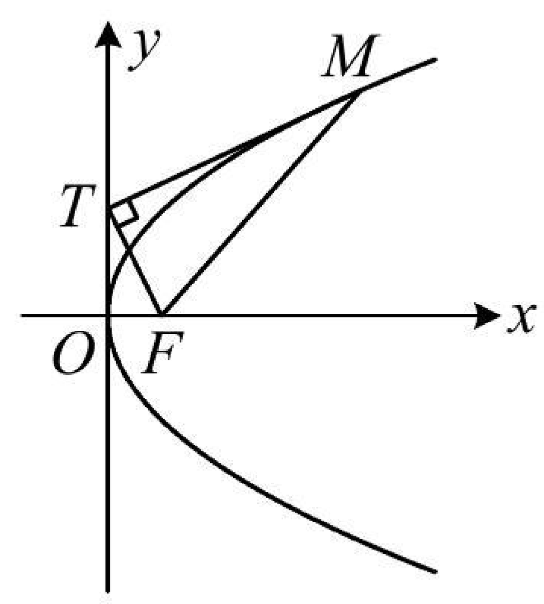
答案：C

解析：以 MF 为直径的圆过点 $T(0,2)$ 等价于 $TM\perp TF$，它和 $|MF|=5$ 这一条件都容易用 M 的坐标翻译，故设 M 的坐标，直接翻译这两个条件建立方程求 p，

由题意，$F(\dfrac{p}{2},0)$，记 $T(0,2)$，设 $M(\dfrac{y_0^2}{2p},y_0)$，则 $|MF|=\dfrac{y_0^2}{2p}+\dfrac{p}{2}=5$ ①，

因为以 MF 为直径的圆过点 $T(0,2)$，所以 $k_{TF}\cdot k_{TM}=-\dfrac{4}{p}\cdot\dfrac{y_0-2}{\dfrac{y_0^2}{2p}}=-1$ ②，

联立①②解得：$p=2$ 或 8，即抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$ 或 $y^2=16x$.



7.（2022·湖北模拟改·★★★）已知 F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，$A(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 为抛物线上的动点，

点 $B(-1,0)$，则 $\dfrac{2|AB|}{\sqrt{4|AF|-2}}$ 的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{6}$　　（D）$\sqrt{5}$

答案： C

解析： $|AF|$ 为抛物线上的点到焦点的距离，用定义转到准线上；A，B 均有坐标，$|AB|$ 用两点距离公式表示，

由题意，$F(\dfrac{1}{2},0)$，$|AF|=x_0+\dfrac{1}{2}$，$|AB|=\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}$，

所以 $\dfrac{2|AB|}{\sqrt{4|AF|-2}}=\dfrac{2\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}}{2\sqrt{x_0}}=\sqrt{\dfrac{(x_0+1)^2+y_0^2}{x_0}}$　①，

式①中有两个变量，可结合抛物线的方程来消元，

因为点 A 在抛物线 $y^2=2x$ 上，所以 $y_0^2=2x_0$，

代入①得：$\dfrac{2|AB|}{\sqrt{4|AF|-1}}=\sqrt{\dfrac{(x_0+1)^2+2x_0}{x_0}}$

$=\sqrt{\dfrac{x_0^2+4x_0+1}{x_0}}=\sqrt{x_0+\dfrac{1}{x_0}+4}\geq\sqrt{2\sqrt{x_0\cdot\dfrac{1}{x_0}}+4}=\sqrt{6}$，

当且仅当 $x_0=\dfrac{1}{x_0}$，即 $x_0=1$ 时取等号，

故 $\dfrac{2|AB|}{\sqrt{4|AF|-2}}$ 的最小值为 $\sqrt{6}$.

8．（2023・全国模拟・★★★★）已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，A 为抛物线 C 上的点，且线段 AF 的垂直平分线经过点 $B(0,\dfrac{5p}{2})$，则 $|AF|=$（　　）

（A）$2\sqrt{3}p$　　（B）$\sqrt{3}p$　　（C）$2\sqrt{5}p$　　（D）$2p$

答案： D

解析： 如图，作 $AM\perp$ 准线 $y=-\dfrac{p}{2}$ 于 M，由抛物线定义，$|AF|=|AM|=y_A+\dfrac{p}{2}$　①，

故只需求 y_A，可将点 B 在 AF 的中垂线上翻译成 $|BF|=|BA|$，从而建立方程求 y_A，

由题意，抛物线的焦点为 $F(0,\dfrac{p}{2})$，

所以 $|BF|=\dfrac{5p}{2}-\dfrac{p}{2}=2p$，$|BA|=\sqrt{x_A^2+(y_A-\dfrac{5p}{2})^2}$，

因为线段 AF 的中垂线经过点 B，所以 $|BF|=|BA|$，

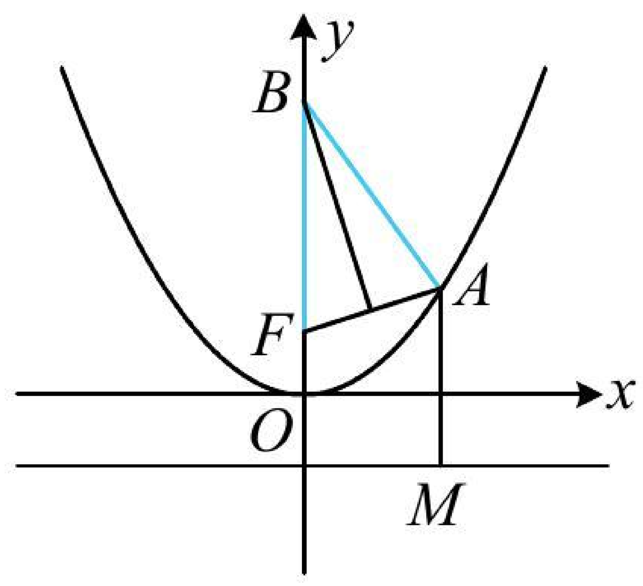
即 $2p=\sqrt{x_A^2+(y_A-\dfrac{5p}{2})^2}$　②，

式②中有 x_A 和 y_A 两个变量，可用抛物线方程消元，

又 $x_A^2=2py_A$，代入式②得 $2p=\sqrt{2py_A+(y_A-\dfrac{5p}{2})^2}$，

化简得：$y_A^2-3py_A+\dfrac{9p^2}{4}=0$，即 $(y_A-\dfrac{3p}{2})^2=0$，

故 $y_A=\dfrac{3p}{2}$，代入式①得 $|AF|=\dfrac{3p}{2}+\dfrac{p}{2}=2p$.



9．（2022•河北唐山一模•★★★★）（多选）已知直线 $l: x=my+4$ 和抛物线 $C: y^2=4x$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，O 为原点，直线 OA，OB 的斜率分别为 k_1，k_2，则（　　）

（A）y_1y_2 为定值　（B）k_1k_2 为定值　（C）y_1+y_2 为定值　（D）k_1+k_2+m 为定值

答案：ABD

解析： 选项中的 y_1+y_2 和 y_1y_2，可通过将直线和抛物线联立，结合韦达定理来算，

联立 $\begin{cases}x=my+4\\ y^2=4x\end{cases}$ 消去 x 整理得：$y^2-4my-16=0$，判别式 $\Delta=16m^2+64>0$ 恒成立，

由韦达定理，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-16$，所以 A 项正确，C 项错误；

对于 B、D 两项，$k_1k_2=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}$ ①，$k_1+k_2+m=\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}+m$ ②，

此二式都可用点在抛物线上将分母的 x_1 和 x_2 转化为 y_1 和 y_2，结合韦达定理来算，

因为 A，B 在抛物线上，所以 $\begin{cases}x_1=\dfrac{y_1^2}{4}\\ x_2=\dfrac{y_2^2}{4}\end{cases}$，代入①得：$k_1k_2=\dfrac{y_1y_2}{\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}}=\dfrac{16}{y_1y_2}=\dfrac{16}{-16}=-1$，

代入②得：$k_1+k_2+m=\dfrac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}}+\dfrac{y_2}{\frac{y_2^2}{4}}+m=\dfrac{4}{y_1}+\dfrac{4}{y_2}+m=\dfrac{4(y_1+y_2)}{y_1y_2}+m=\dfrac{4\times4m}{-16}+m=0$，故 B 项和 D 项正确.

10．（2022•黑龙江哈尔滨模拟•★★★★）直线 $l: y=x-2$ 与抛物线 $C: y^2=2x$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中垂线与 x 轴交于点 D，O 为原点，则四边形 $OADB$ 的面积为_____.

答案：$4\sqrt{5}$

解析： 由于点 D 坐标可求，则 OD 的长度可算，故按 $S=\dfrac{1}{2}|OD|\cdot|y_A-y_B|$ 来算面积，于是先把直线 l 与抛物线 C 联立，结合韦达定理求 AB 中点 E 的坐标，再写出中垂线的方程，求点 D，

$y=x-2\Rightarrow x=y+2$，联立$\begin{cases}x=y+2\\y^2=2x\end{cases}$消去 x 整理得：$y^2-2y-4=0$，判别式$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-4)=20$，

由韦达定理，$y_A+y_B=2$，所以$x_A+x_B=y_A+2+y_B+2=(y_A+y_B)+4=6$，从而 AB 中点为 $E(3,1)$，

故 AB 中垂线的方程为 $y-1=-(x-3)$，整理得：$x+y-4=0$，令 $y=0$ 得：$x=4$，所以 $D(4,0)$，

再算$|y_A-y_B|$，可由韦达定理推论来算，$|y_A-y_B|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|1|}=2\sqrt{5}$，

所以四边形 $OADB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|OD|\cdot|y_A-y_B|=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$.